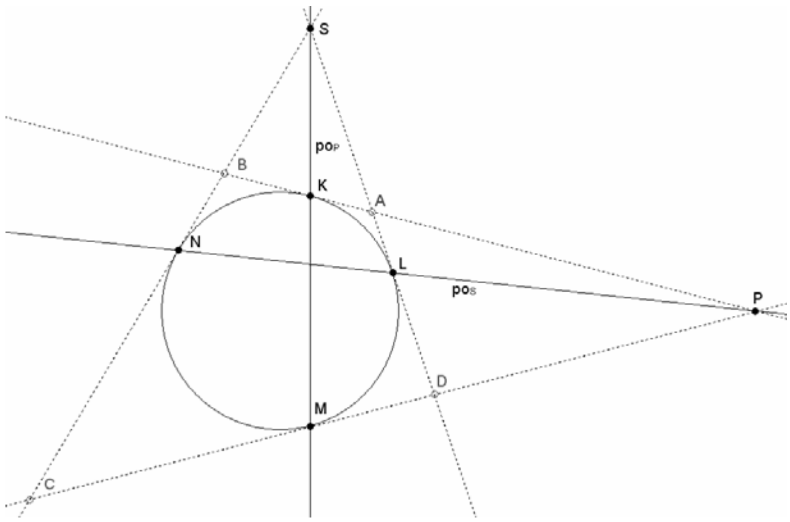
PROBLEMAS DE GEOMETRIA DE OLIMPIADAS

Problemas de Francisco Bellot Rosado – soluciones modificadas por Albrecht Hess

Problema 1 *En el cuadrilátero ABCD está inscrito un círculo, siendo K, L, M, N los puntos de tangencia con los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Las rectas DA y CB se cortan en S, mientras que BA y CD se cortan en P. Si S, K y M están alineados, probar que P, N y L también lo están.*

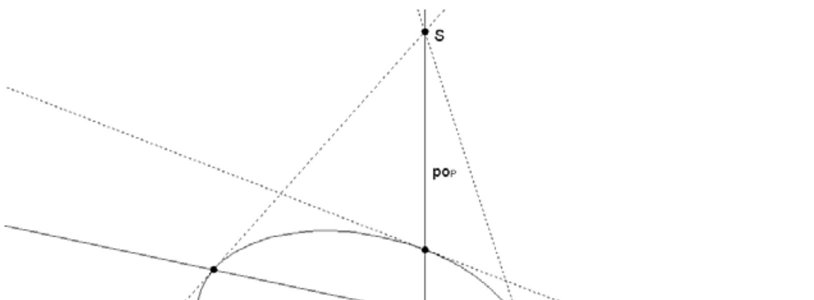
(Olimpiada de Bielorrusia 1996)

Solución mía:



S, K y M están alineados, lo cual significa, que el punto S(s|t) está en la linéa polar po_P del punto P(p|q) con respecto al círculo. Esta linéa polar pasa siempre por los puntos K y M donde las tangentes que pasan por P tocan el círculo. Para un círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y, la ecuación de po_P es $p\,x + q\,y = r^2$ y por lo tanto $p\,s + q\,t = r^2$. Entonces, la linéa polar po_S por N y L tiene la ecuación $s\,x + t\,y = r^2$, lo que significa que los puntos P, N y L están alineados.

(Válido también para otras cónicas: La linéa polar – con respecto a una cónica – de un punto S que está en la linéa polar de otro punto P siempre pasa por P.)



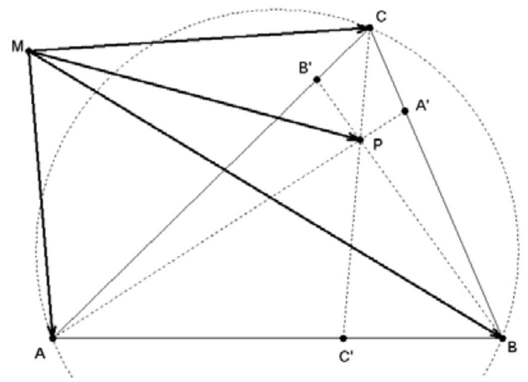
Problema 2 *En el triángulo ABC, sea P el punto de concurrencia de las cevianas AA', BB' y CC' (con A'∈(BC) , B'∈(CA) , C'∈(AB)), y sea M un punto del plano del triangulo. Demostrar que*

$$\frac{[BPC]MA^2+[CPA]MB^2+[APB]MC^2}{[ABC]}=MP^2+r(P)$$

donde r(P) es la potencia de P respecto al círculo circunscrito a ABC y [...] representa el área.

(Revista rumana Gamma)

Solución mía:



Los números $u=\frac{[BPC]}{[ABC]}, v=\frac{[CPA]}{[ABC]}, w=\frac{[APB]}{[ABC]}$ son las coordenadas baricéntricas del punto P con respecto al triángulo ΔABC. Eso significa que para cualquier punto M del plano tenemos la ecuación

$$\overrightarrow{MP}=u\,\overrightarrow{MA}+v\,\overrightarrow{MB}+w\,\overrightarrow{MC}.$$

Entonces

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|^2=u^2\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+v^2\left|\overrightarrow{MB}\right|^2+w^2\left|\overrightarrow{MC}\right|^2+2uv\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2vw\,\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+2wu\,\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}.$$

Utlizando

$$2\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \quad \text{y} \quad u+v+w=1$$

llegamos a

(1) $$\left|\overrightarrow{MP}\right|^2=u\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+v\left|\overrightarrow{MB}\right|^2+w\left|\overrightarrow{MC}\right|^2-\left(uv\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+vw\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+wu\left|\overrightarrow{CA}\right|^2\right).$$

Eligimos M = O, el centro der circumcírculo del triángulo ΔABC con el radio r, obtenemos con $u+v+w=1$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=r^2-\left(uv\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+vw\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+wu\left|\overrightarrow{CA}\right|^2\right),$$

lo que significa que la potencia r(P) de P con respecto al círculo circunscrito es:

(2) $$r(P)=r^2-\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left(uv\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+vw\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+wu\left|\overrightarrow{CA}\right|^2\right).$$

La solución se obtiene combinando (1) y (2).

(Con la ecuación (1) se describen círculos en coordenadas baricéntricas del punto P.)

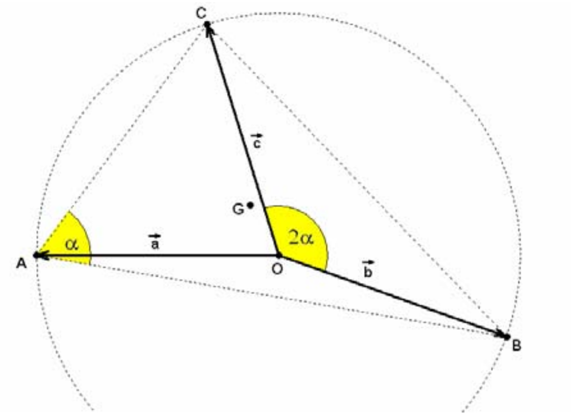
Problema 3 *Demostrar que, si en el triángulo ABC, donde O es el centro del círculo circunscrito con el radio R y G el baricentro,*

$$GO = \frac{R}{3},$$

entonces ABC es rectángulo, y recíprocamente.

(Elemente der Mathematik, 1952)

Solución mía:



Por $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ vemos que hay que demostrar que ABC es rectángulo si y sólo si $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = R$ que equivale a demostrar que

$$3R^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a} = R^2$$

o bien

$$1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$$

Utilizando $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$ y $\cos 2\gamma = 1 - 2\sin^2\gamma$ llegamos a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\gamma = 0.$$

Como $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, eso significa

$$\left(\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\beta\right) + \left(\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta\right) - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = 0$$

por lo tanto

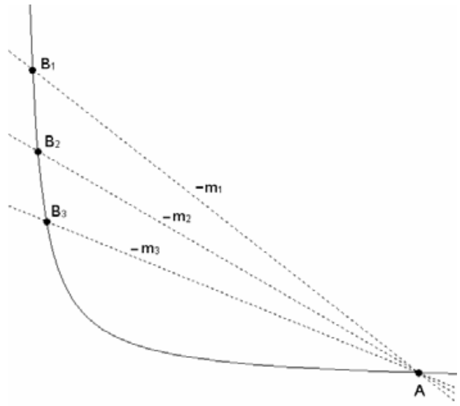
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0.$$

Problema 4 *La gráfica Γ de la función*

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

se dibuja en el plano con respecto a unos ejes de coordenadas rectangulares Oxy. Después se borran los ejes de coordenadas. Reconstruirlos con regla y compás.

(Competición búlgara de primavera, 1992)



Solución mía:

Elegimos un punto $A\left(a \mid \frac{1}{a}\right) \in \Gamma$ y consideramos el conjunto de las rectas que pasan por A con sus respectivas inclinaciones –m. Como Γ es de grado 2, el punto B en que estas rectas cortan Γ tiene una expresión racional en a y m:

$$B\left(\frac{1}{ma} \mid ma\right).$$

Se observa, que el punto medio $C\left(\frac{ma^2+1}{2ma} \middle| \frac{ma^2+1}{2a}\right)$ del segmento AB está en la recta y = mx si A recorre Γ. Esta recta pasa por O(0 | 0). El punto O se reconstruye eligiendo dos valores distintos de m y para cada uno de estos valores dos paralelas con sus respectivos puntos A, B y C.

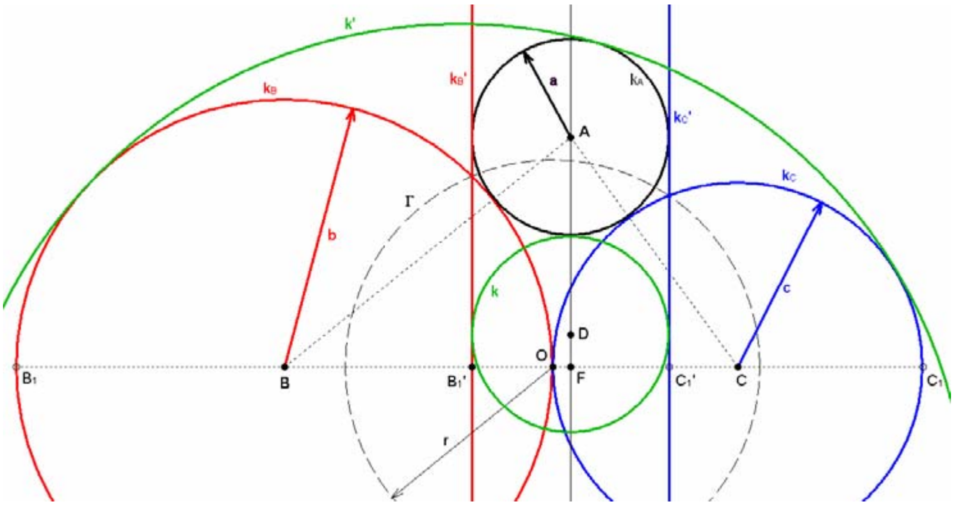
Como AB y OC tienen inclinaciones con signos opuestos, se construye la paralela a AB por O y los ejes son los bisectores de los ángulos entre esta paralela y OC.

Problema 5 *Resolver la ecuación*

$$\sqrt{abx(x-a-b)}+\sqrt{bcx(x-b-c)}+\sqrt{cax(x-c-a)}=\sqrt{abc(a+b+c)}$$

(Mathesis, 1890)

Solución mía:



La ecuación (y el problema) admite la siguiente reformulación geométrica: Hallar el radio de una circunferencia tangente exteriormente a tres circunferencias k_A, k_B y k_C dadas de radios a, b, c tangentes dos a dos.

En el punto O de tangencia de k_B y k_C construimos un círculo Γ de tal manera, que la inversion con respecto a Γ deja k_A cómo estaba. Entonces las imágenes k_B' y k_C' serán rectas perpendiculares a BC y tangentes a k_A. Si el radio de Γ es r, obtenemos

(1) $$2a=OB_1'+OC_1'=\frac{r^2}{2b}+\frac{r^2}{2c},\ \text{lo cual significa}\ r^2=\frac{4abc}{b+c}.$$

El radio R' de la imagen k' en la inversion con respecto a Γ de un círculo k con centro M y radio R se calcula con la formula

(2) $$R'=\frac{r^2}{\left|OM^2-R^2\right|}R.$$

Para el círculo k_A obtenemos entonces

$$a=\frac{r^2}{OA^2-a^2}a\ \text{que implica}\ OA^2=r^2+a^2.$$

Para aplicar la formula (2) al círculo k con centro D hay que calcular OD:

$$\begin{aligned}OD^2 &= OF^2 + FD^2\\ &= OA^2-AF^2+(AF-2a)^2 \quad \text{con}\ AF=h_{BC}\\ &= r^2+5a^2-4ah_{BC}\end{aligned}$$

Entonces el radio x del círculo k' es según las fórmula (1) y (2)

$$x=\frac{r^2}{\left|OD^2-a^2\right|}a=\frac{r^2}{\left|r^2+4a^2-4ah_{BC}\right|}a=\frac{abc}{\left|ab+bc+ca-(b+c)h_{BC}\right|}=\frac{abc}{\left|ab+bc+ca-2A_{ABC}\right|}$$

.

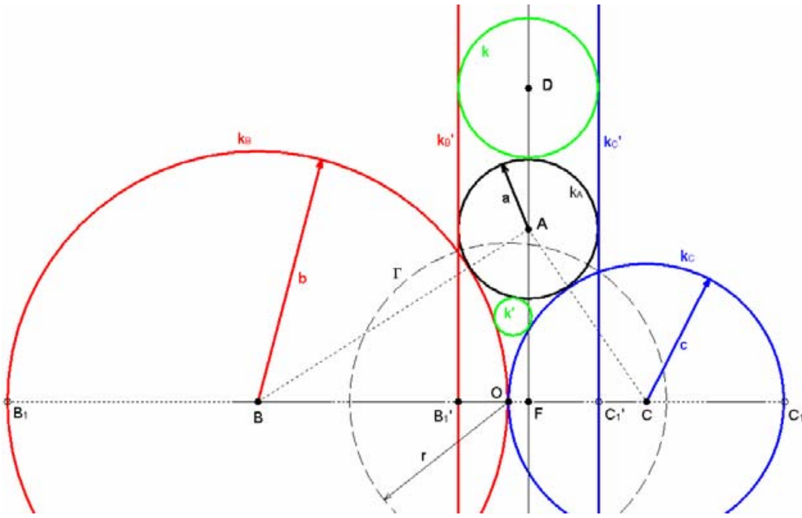
El problema se explica mejor con la ecuación

$$\sqrt{abx(x+a+b)}+\sqrt{bcx(x+b+c)}+\sqrt{cax(x+c+a)}=\sqrt{abc(a+b+c)},$$

ya que el centro D’ de k’ está dentro del tríangulo ABC. En el problema tal como se da en el enunciado el punto D’ puede salir del tríangulo ABC y entonces el área de ABC no es la suma de los tres tríangulos.

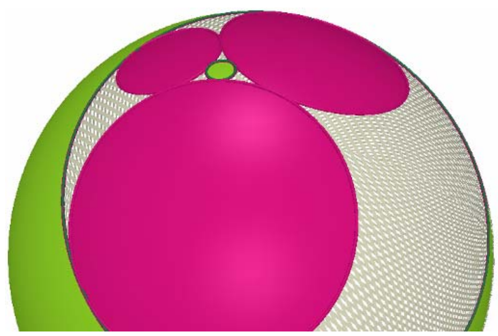
$$\begin{aligned}
x=\frac{abc}{ab+bc+ca+2A_{ABC}} &= \frac{abc}{ab+bc+ca+2\sqrt{abc(a+b+c)}}\\
\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c} &= 2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}\\
\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 &= 4\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\
\frac{1}{x^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} &= 2\left(\frac{1}{xa}+\frac{1}{xb}+\frac{1}{xc}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)
\end{aligned}.$$

$$2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

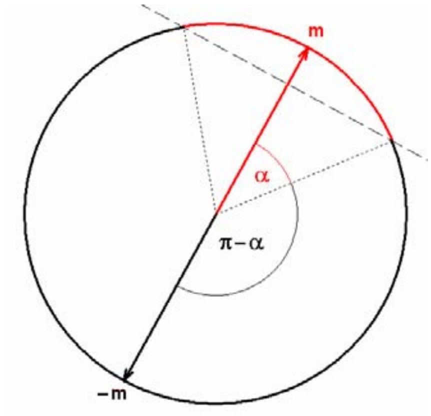


La explicación más lucida de esta fórmula, que además se puede generalizar al caso de más dimensiones, está en un árticulo “Beyond the Descartes Circle Theorem” de Lagarias, Mallows y Wilks en Amer. Math. Monthly **109** (2002), 338–361 [**http://arxiv.org/abs/math/0101066**].

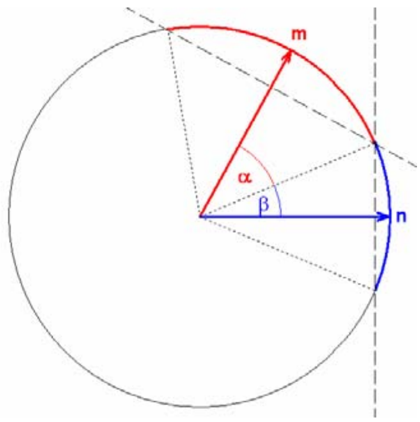
En realidad, esta fórmula es una formula sobre círculos en una esfera. La diferencia más notable entre las configuraciones de los círculos en el plano y de los casquetes en la esfera es que los interiores de estos casquetes no tienen puntos en común si se elige bien entre las dos posibilidades de los casquetes que corresponden a un círculo – como se puede ver en la imagen.



Si los casquetes están sobre una esfera Ò3 de radio 1 la ecuación del plano que separa el casquete del resto de la esfera es $x \cdot m = \cos\alpha$ para el casquete rojo y $x \cdot (-m) = \cos(\pi - \alpha)$ para el casquete negro. Hacemos corresponder a un casquete el vector $p = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha, m)$ de cuatro dimensiones. El factor $\frac{1}{\sin\alpha}$ sirve para poner todos estos vectores en la pseudo–esfera $-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1$. Al revés, a cada punto de la pseudo–esfera corresponde un vector que representa un casquete.



La condición para que dos casquetes $p = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha, m)$ y $q = \frac{1}{\sin\beta}(\cos\beta, n)$ se toquen es $m \cdot n = \cos(\alpha + \beta)$ o en coordenadas de p y q: $-p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4 = -1$. Si tenemos cuatro casquetes p, q, r, s unimos sus componentes en una matriz $P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{pmatrix}$. La condición necesaria y suficiente para que estos casquetes se toquen mutualmente es



(1) $$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que de forma más corta se escribe $P^T JP = K$ con las matrices

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invertiendo $P^T JP = K$ llegamos a $PK^{-1}P^T = J^{-1}$. Como $K^{-1} = \frac{1}{4}K$ y $J^{-1} = J$ la ecuación (1) es equivalente a $PKP^T = 4J$. De ahí se deduce

$$2\left(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + s_1^2\right) - \left(p_1 + q_1 + r_1 + s_1\right)^2 = -4$$

para casquetes mutuamente tangentes con los radios esféricos $\alpha, \beta, \ldots$ y $p_1 = \cot\alpha,\ q_1 = \cot\beta, \ldots$ (Los radios esféricos están elegidos de tal manera que los interiores de los casquetes no tienen puntos en común.)

Para llegar a fórmulas correspondientes en el caso del plano, aplicamos una proyección estereográfica de la esfera Ò3 desde el “polo sur” s = (–1 | 0 | 0) sobre el plano $x_1 = 0$. Un punto $x = (x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3)$ de Ò3 se proyecta en $(y_1 \,|\, y_2) = \frac{1}{1+x_3}(x_2 \,|\, x_3)$. A esta fórmula añadimos las fórmulas $x \cdot m = \cos\alpha$ y $x \cdot x = 1$ y llegamos a

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{x_2^2 + x_3^2}{(1+x_1)^2} = \frac{1-x_1^2}{(1+x_1)^2} = \frac{2}{1+x_1} - 1$$

$$m_1(1+x_1) + m_2 y_1 (1+x_1) + m_3 y_2 (1+x_1) = \cos\alpha + m_1 \quad \text{o} \quad \frac{m_1 + m_2 y_1 + m_3 y_2}{\cos\alpha + m_1} = \frac{1}{1+x_1},$$

así que el círculo que limita el casquete $x \cdot m = \cos\alpha$ se transforma en

$$\left(y_1 - \frac{m_2}{m_1 + \cos\alpha}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{m_3}{m_1 + \cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sin\alpha}{m_1 + \cos\alpha}\right)^2,$$

es decir en un círculo con el centro $\left(\frac{m_2}{m_1 + \cos\alpha} \middle| \frac{m_3}{m_1 + \cos\alpha}\right)$ y el radio $\frac{\sin\alpha}{m_1 + \cos\alpha}$.

¿Qué pasa si el radio $\frac{\sin\alpha}{m_1 + \cos\alpha}$, o lo que es lo mismo, $m_1 + \cos\alpha$ es negativo? Entonces $s \cdot m - \cos\alpha = -m_1 - \cos\alpha > 0$ y el polo sur s pertenece al casquete. Así de forma automatica hemos integrado a través de esta transformación el caso de un círculo en el plano que toca otro círculo por dentro. El círculo exterior tiene en este caso una curvatura $b = \frac{1}{r} = \frac{m_1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$ negativa.

Si hacemos corresponder a un círculo con centro $(x_1 \,|\, y_1)$ y curvatura $b_1 = \frac{1}{r_1}$ el vector $(b_1 \,|\, b_1 x_1 \,|\, b_1 y_1)$, entonces al círculo con centro $\left(\frac{m_2}{m_1 + \cos\alpha} \middle| \frac{m_3}{m_1 + \cos\alpha}\right)$ y radio $\frac{\sin\alpha}{m_1 + \cos\alpha}$ le corresponde un vector $\frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha + m_1 | m_2 \,|\, m_3)$ que es

$$\frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha + m_1 | m_2 \,|\, m_3) = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha \,|\, m_1 | m_2 \,|\, m_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

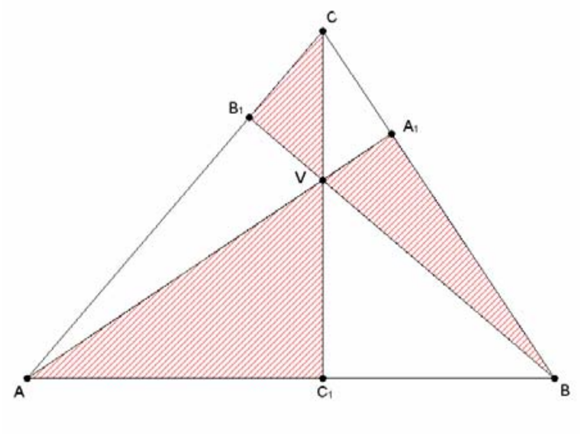
Si tenemos cuatro círculos del plano tangentes cada dos entre ellos y la correspondiente matriz $C = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 x_1 & b_1 y_1 \\ b_2 & b_2 x_2 & b_2 y_2 \\ b_3 & b_3 x_3 & b_3 y_3 \\ b_4 & b_4 x_4 & b_4 y_4 \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ obtenemos

$$C^T K C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P K P^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 4J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

que incluye $2\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2\right) - \left(b_1 + b_2 + b_3 + b_4\right)^2 = 0$.

Problema 6 *Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas del triángulo acutángulo ABC, y sea V su punto de intersección. Si los triángulos AC_1V, BA_1V y CB_1V tienen la misma área, ¿será ABC equilátero?*

(Olimpiada de Chequia 1994)



Solución mía

Sean (a, b, c), a+b+c = 1, las coordenadas baricéntricas del punto V. Las coordenadas baricéntricas de los otros puntos son:

A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), $A_1\left(0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c}\right)$

$B_1\left(\frac{a}{a+c}, 0, \frac{c}{a+c}\right)$, $C_1\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}, 0\right)$. Las áreas de los triángulos AC_1V, BA_1V y CB_1V se calculan con

$$A_{AC_1V} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \cdot A_{ABC} = \frac{bc}{a+b} \cdot A_{ABC} = \frac{abc}{a(a+b)} \cdot A_{ABC},$$

$$A_{BA_1V} = \frac{abc}{b(b+c)} \cdot A_{ABC},\ A_{CB_1V} = \frac{abc}{c(a+c)} \cdot A_{ABC}$$

Sea a el mínimo de las coordenadas de V. Si b o c son distintos de a, entonces $a(a+b) < b(c+b)$ y el área del triángulo AC_1V es más grande que el área del triángulo BA_1V, en contra de la condición del problema.

Así tenemos V = G (ortocentro = baricentro) y ABC es equilátero.

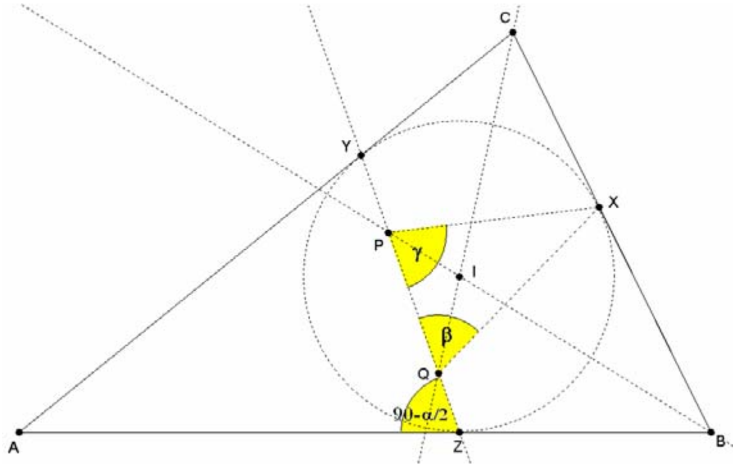
Problema 7 *La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene centro I y es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos X, Y, Z respectivamente. Las rectas BI y CI cortan a la recta YZ en los puntos P y Q, respectivamente. Demostrar que si los segmentos XP y XQ tienen la misma longitud, entonces ABC es isósceles.*

(Olimp. Iberoamericana 2001, Problema 2)

Solución mía

Sin palabras!

(BZPX y CXQY tienen ejes de simetría)



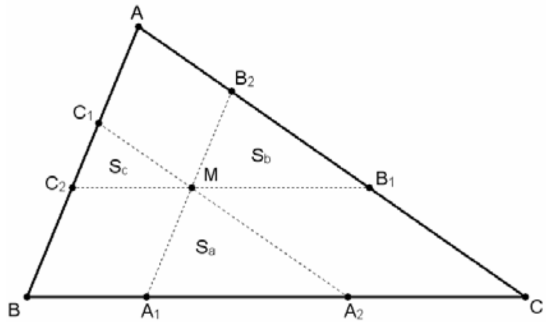
Problema 8 *Sea M un punto interior al triángulo ABC cuyo área es S. Las paralelas por M a AB y a AC forman, con BC, un triángulo de área S_a. Se definen análogamente S_b y S_c..*

a) Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{S_a}}+\frac{1}{\sqrt{S_b}}+\frac{1}{\sqrt{S_c}}\geq\frac{9}{\sqrt{S}}.$$

b) Determinar la posición del punto M para que se verifique la igualdad.

Solución mía



Calculamos en coordenadas baricéntricas: A(1|0|0), B(0|1|0), C(0|0|1) y M(a|b|c) con a+b+c=1. La recta que pasa por A y B es z = 0. Una recta paralela a z = 0 tiene una ecuación x + y + tz=0. Con esta observación se calculan las coordenadas A_1(0|1–c|c), A_2(0|b|1–b), B_1(a|0|1–a), B_2(1–c|0|c), C_1(1–b|b|0), C_2(a|1–a|0) y las áreas

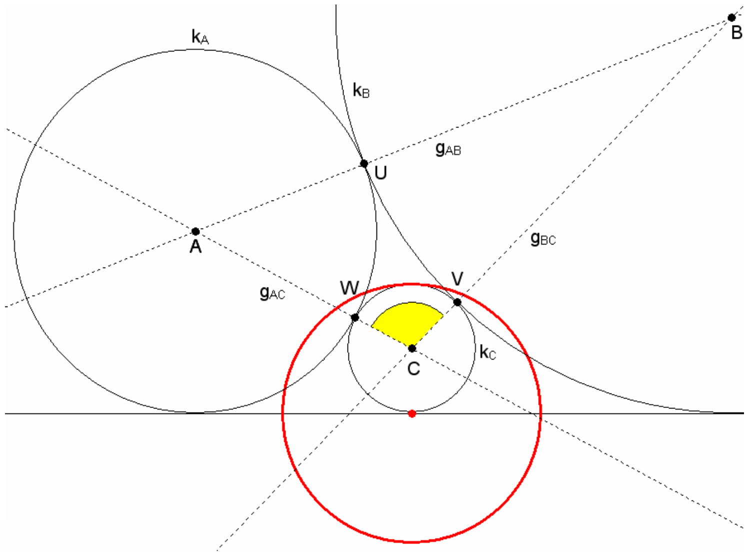
$$S_a=\begin{vmatrix}a & b & c\\ 0 & 1-c & c\\ 0 & b & 1-b\end{vmatrix}\cdot S=a^2\cdot S,\quad S_b=b^2\cdot S,\quad S_c=c^2\cdot S.$$

La desigualdad se transforma en $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$ para a+b+c=1 y se deduce de la desigualdad $\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ entre la media aritmética y la media armónica.

Igualdad habrá sólo en el caso a = b = c = 1/3, es decir en caso que M es el baricentro.

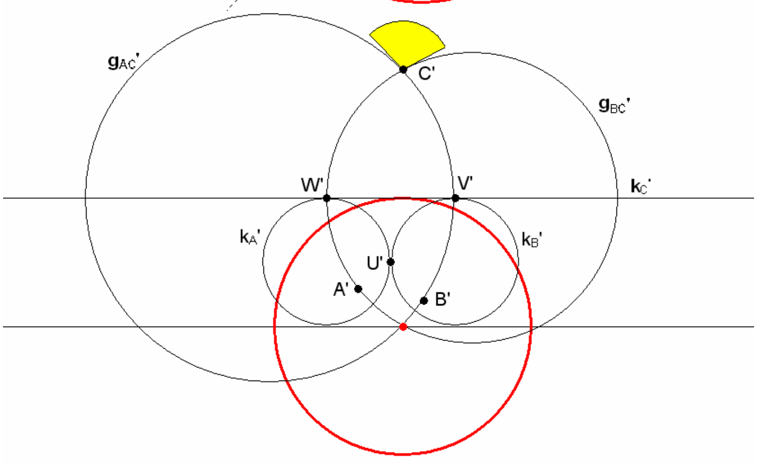
Problema 9 *Se dan en el plano una recta Δ y tres circunferencias de centros A, B, C, tangentes a Δ y tangentes exteriores entre sí dos a dos. Demostrar que el triángulo ABC es obtusángulo y hallar el valor máximo de la medida del ángulo obtuso .*

Solución mía



Inversión con respecto al círculo rojo cuyo centro es el centro de tangencia del círculo k_A con la recta Δ.:

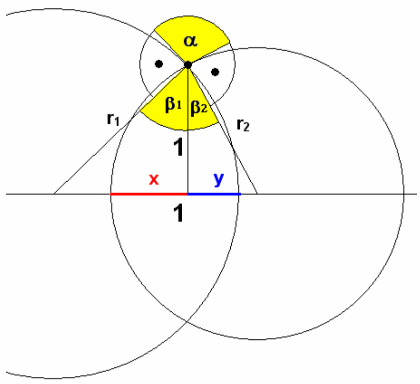
k_C se transforma en una línea k_C' paralela a Δ. k_A' y k_B' están tangentes a Δ y k_C' y además entre sí. Las rectas g_{AC} y g_{BC} se transforman en círculos que cruzan perpendicularmente la línea k_C' en V' y W' y pasan por C'.



Suponiende que el diámetro de k_C es 1, el punto C' dista 1 de k_C' y la misma distancia hay entre V' y W'. El ángulo ACB se transforma en el ángulo entre g_{AC}' y g_{BC}' en el punto C'.

Ahora consideramos sólo las cosas importantes: Dos círculos que se cortan en dos puntos cuyo distancia es 2. Los puntos en que los círculos cortan la recta entre sus centros tienen la distancia 1. Hay que encontrar el máximo del ángulo α y hay que probar que α siempre es más grande que 90°.

La última afirmación es evidente ya que $\alpha+\beta_1+\beta_2 = 180°$ y $\beta_1+\beta_2 < 90°$.



Para los radios r_1 y r_2 tenemos:

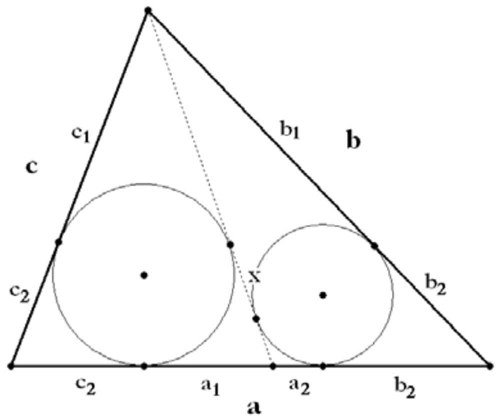
$r_1^2 = 1+(r_1-y)^2$ o $r_1 = \dfrac{1+y^2}{2y}$ y $\tan\beta_1 = r_1 - y = \dfrac{1-y^2}{2y}$.

Como eso parece al inverso de una formula para el tangente del ángulo doble, intentamos sacar una formula para $\tan\dfrac{\beta_1}{2} = \dfrac{1-\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = \dfrac{x}{1+y}$. De la misma manera obtenemos $\tan\dfrac{\beta_2}{2} = \dfrac{y}{1+x}$ y $\tan\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2} = \dfrac{\tan\dfrac{\beta_1}{2}+\tan\dfrac{\beta_2}{2}}{1-\tan\dfrac{\beta_1}{2}\tan\dfrac{\beta_2}{2}} = 1-xy$.

El máximo valor de α sale con el mínimo valor de $\beta_1+\beta_2$ y eso ocurre si x = y = ½. (x+y=1). En este caso tenemos $\tan\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2} = \dfrac{3}{4}$ y $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{4}{3}$.

Problema 10 *Sea el triángulo ABC y $A_1 \in (BC)$. Demostrar que los círculos inscritos en los triángulos ABA_1 y ACA_1 son tangentes entre sí, si y solamente si A_1 es el punto de tangencia del circulo inscrito en ABC.*

Solución mía:



Tenemos las ecuaciones:

(1) $c_1 + c_2 = c$

(2) $b_1 + b_2 = b$

(3) $a_1 + a_2 + b_2 + c_2 = a$

(4) $a_1 = x + a_2$

(5) $b_1 = x + c_1$

(4)+(5) $2x = a_1 - a_2 + b_1 - c_1$

(3) $\quad = 2a_1 + b_1 + b_2 + c_2 - c_1 - a$

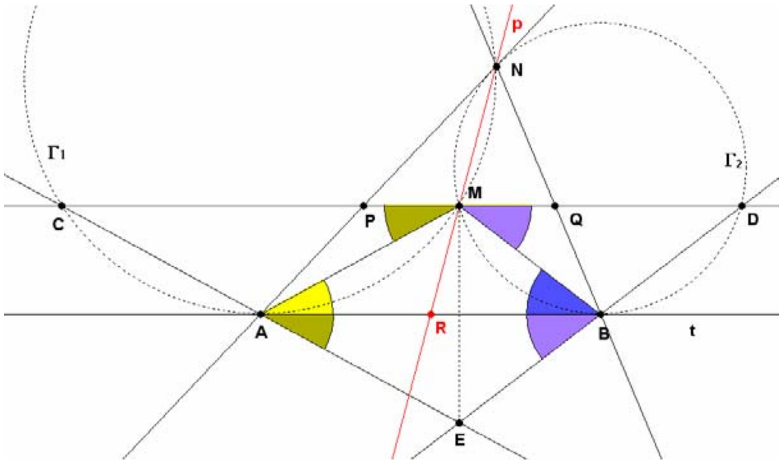
(1)+(2) $\quad = 2a_1 + 2c_2 - a - c + b$

Solucionamos por x = $a_1 + c_2 - \frac{a+c-b}{2}$. Eso es justo lo que había que demonstrar.

Problema 11 *Dos circunferencias, Γ_1 y Γ_2, se cortan en M y N. Sea t la recta tangente común a ambas circunferencias, tal que M está más cerca de t que N. La recta t es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La recta paralela a t que pasa por M corta de nuevo a Γ_1 en C y a Γ_2 en D. Las rectas CA y DB se cortan en E. Las rectas AN y CD se cortan en P; las rectas BN y CD se cortan en Q. Demostrar que EP = EQ.*

(Problema 1, IMO 2000)

Solución mía



Los tres ángulos amarillos son iguales – y los azules también. Entonces AMBE es simetrico con respecto a AB y ME es perpendicular a AB.

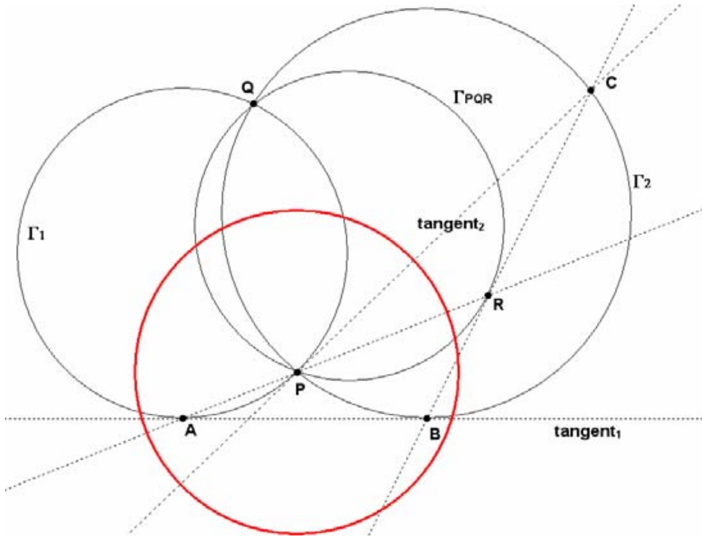
La recta p que pasa por M y N es la linea de potencia de Γ_1 y Γ_2 lo cual significa que las distancias entre cualquier punto X sobre p y los puntos donde los tangentes que pasan por X tocan a los círculos Γ_1 y Γ_2 son iguales. Por ejemplo: AR = RB. Por homotetía PM = MQ, lo cual nos lleva a PE = QE.

Problema 12 *Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias que se cortan en P y Q. La tangente común a ambas, más próxima a P, es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La tangente a Γ_1 en P corta a Γ_2 en $C \neq P$, y la prolongación de AP corta a BC en R. Demostrar que el círculo circunscrito a PQR es tangente a BP y a BR.*

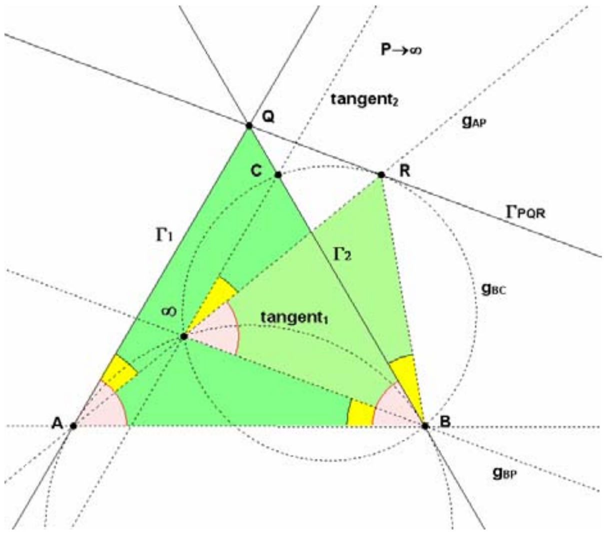
(Problema 2, APMO 1999)

Solución mía

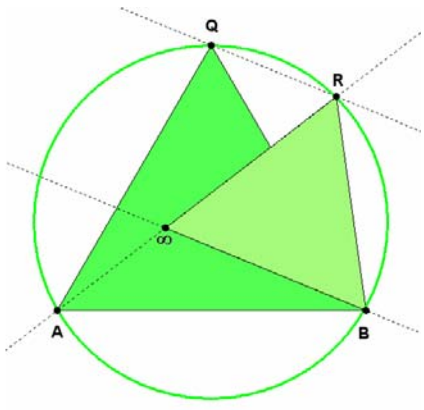
Inversión con respecto al círculo rojo cuyo centro es el punto P con radio arbitrario:



El punto P se va hacia el infinito, el infinito ∞ está ahora donde estaba P. Γ_1 y Γ_2 se transforman en líneas rectas que son tangentes al círculo que es el imagen de la tangente$_1$. Por lo tanto, el triángulo ABQ es isósceles. La tangente$_2$ a Γ_1 en P se transforma en una paralela a Γ_1 por ∞. La recta g_{BC} se ha convertido en el circuncírculo de BC∞. Y la recta g_{AP} es invariable y el círculo Γ_{PQR} se transforma en la recta por Q y R. Lo que queda a demostrar es que la recta Γ_{PQR} es tangente a g_{BC} en R y paralela a B∞.



Comparando unos ángulos se ve que los triángulos ABQ y BR∞ son semejantes en una posición en que A, ∞ y R están sobre una línea recta. Para esta configuración se demuestra facilmente, que B∞ y QR son paralelas, lo que quedaba a probar.

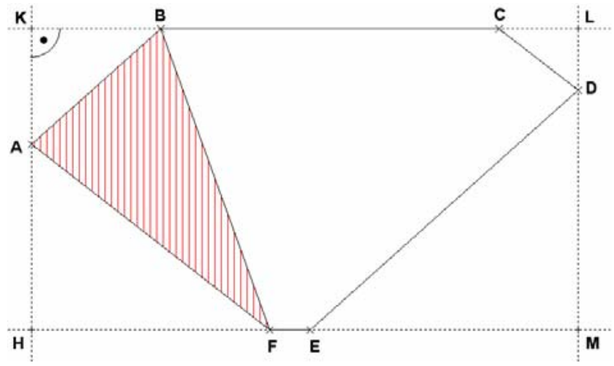


Problema 13 *Sea ABCDEF un hexágono convexo tal que AB es paralelo a ED, BC es paralelo a FE y CD es paralelo a AF. Sean R_A, R_C , R_E los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos FAB, BCD y DEF, respectivamente; y sea p el perímetro del hexágono. Demostrar que*

$$R_A + R_E + R_C \geq \tfrac{1}{2} p.$$

(Original de Nairi M. Sedrakian).

Solución oficial



Sean a, b, c, d, e, f las longitudes de AB, BC, DE, EF y FA, respectivamente. Obsérvese que los ángulos opuestos del hexágono son iguales. Desde A y D se trazan perpendiculares a las rectas BC y EF . Se verifican las relaciones

KH = AB sin B + AF sin F

LN = DC sin C + DE sin E

que, mediante la igualdad de ángulos opuestos en el hexágono, se covierten en

KH = AB sin B + AF sin C

LN = DC sin C + DE sin B.

La distancia KH = LN es la distancia entre las rectas BC y EF, luego BF ≥ KH =LN, y por lo tanto

2 BF ≥ KH + LN = AB sin B + AF sin C + DC sin C + DE sin B.

El teorema de los senos en ABF da BF = $2R_A \cdot$ sin A, de donde

$4R_A$ sin A = 2BF ≥ AB sin B + AF sin C + DC sin C + DE sin B

y análogamente

$4R_C$ sin C = 2BD ≥ FA sin A + FE sin B + CB sin B + CD sin A

$4R_E$ sin B = 2DF ≥ BC sin C + BA sin A + ED sin A + EF sin C

Dividiendo esas desigualdades respectivamente por sin A, sin B, sin C y sumando, se obtiene

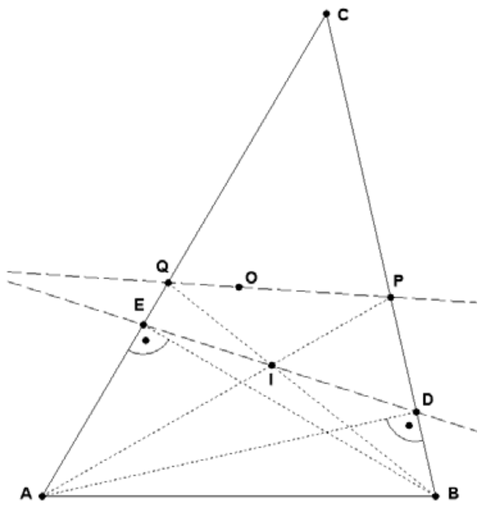
$$4\,(R_A + R_C + R_E) \geq DC\left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\right) + CB\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) + \ldots$$

y que falta para obtener el resultado es utilizar la desigualdad y/x + x/y ≥ 2.

La igualdad se alcanza si y sólo si el hexágono es regular.

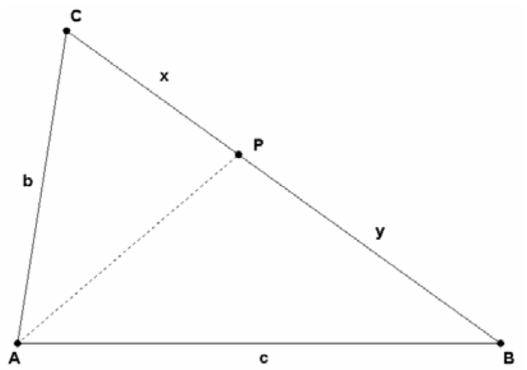
Sedrakian ha publicado en Mathematics Competitions, vol. 9, n°2, 1996, un artículo titulado “The Story of creation of a 1996 IMO problem”, en el que explica el proceso de obtención del problema.

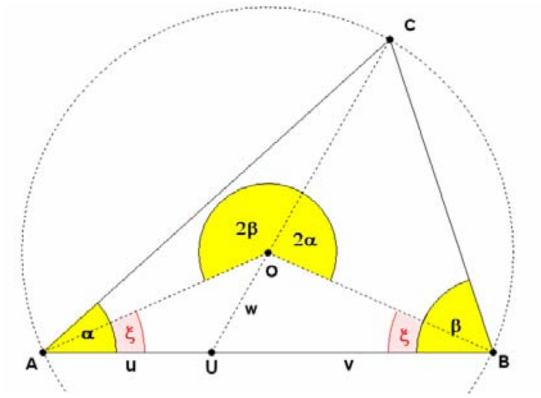
Problema 14 *En el triángulo acutángulo ABC, AD y BE son alturas, y AP, BQ bisectrices interiores. Si I, O son, respectivamente, el incentro y el circuncentro de ABC, demostrar que D, E, I están alineados si y sólo si P, Q, O están alineados.*



Solución mía

Si AP es bisectriz, entonces b : c = x : y , lo cuál significa que las coordenadas baricentricas homogéneas de P son $(0|b|c) \equiv (0|\sin\beta|\sin\gamma)$. De la misma manera se calculan las coordenadas baricentricas $(\sin\alpha|0|\sin\gamma)$ de Q, $(\sin\alpha|\sin\beta|\sin\gamma)$ de I, $(\tan\alpha|0|\tan\gamma)$ de E y $(0|\ \tan\beta|\tan\gamma)$ de D.





Para determinar las coordenadas baricentricas de O obtenemos en los triángulos AUO y BUO: $u : \sin 2\beta = w : \sin\xi = v : \sin 2\alpha$, lo cuál significa que las coordenadas de U son $(\sin 2\alpha|\sin 2\beta|0)$. Un cálculo similar para los otros lados del triángula ABC nos lleva a las coordenadas baricentricas $(\sin 2\alpha|\sin 2\beta|\sin 2\gamma)$ de O.

D, E y I están alineados – en coordenadas baricentricas: $\begin{vmatrix} 0 & \tan\beta & \tan\gamma \\ \tan\alpha & 0 & \tan\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$

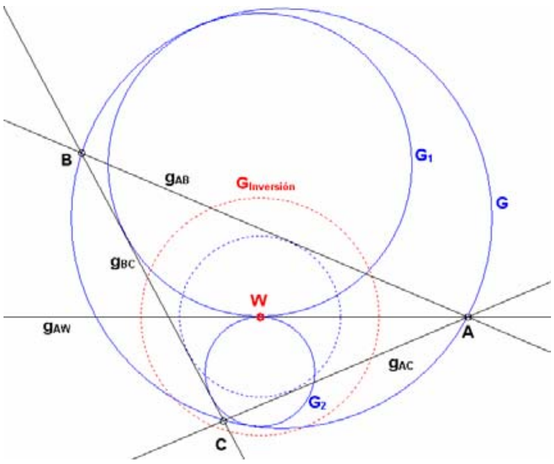
(Eso significa que el área del triángulo DEI es zero.)

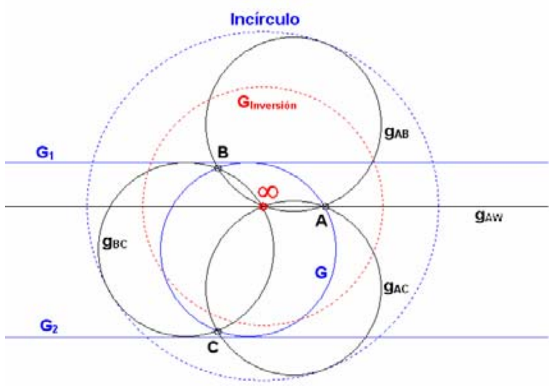
P, Q y O están alineados – en coordenadas baricentricas: $\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta & \sin\gamma \\ \sin\alpha & 0 & \sin\gamma \\ \sin 2\alpha & \sin 2\beta & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = 0$

Pero la segunda determinante es $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ veces la primera:

Problema 15 *Las circunferencias G, G_1, G_2 están relacionadas de la siguiente manera: G_1 y G_2 son tangentes exteriores en el punto W; ambas son, además, tangentes interiores a G. Los puntos A, B y C de la circunferencia G se determinan de la siguiente forma: BC es la tangente exterior común a G_1 y G_2; y WA es la tangente común interior a G_1 y G_2, de modo que W y A están a un mismo lado de la recta BC. Demostrar que W es el incentro de ABC.*

Solución mía



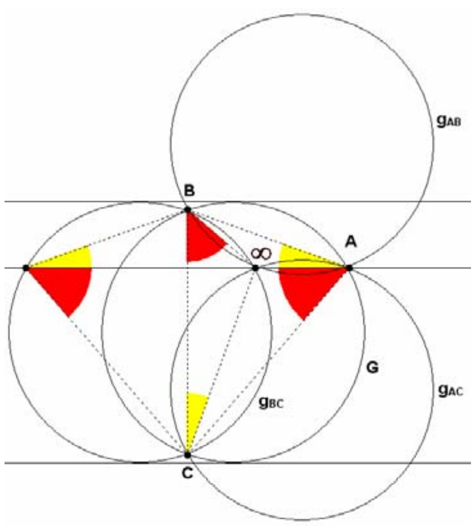


En el imagen a la izquierda se ve el problema y a la derecha su transformación después de una inversión con respecto a un círculo con centro W y un radio sin especificar. Los círculos G_1 y G_2 se transforman en rectas paralelas y el imagen de G toca las dos rectas. La recta g_{WA} queda invariable, y en lugar de W tenemos el punto ∞. El imagen de la recta BC es un círculo que toca como G las dos paralelas G_1 y G_2 y pasa por ∞ – entonces una traslación de G por el vector $\overrightarrow{A\infty}$. Las imagenes de B y C son los puntos de intersección de ambos círculos G y g_{BC}. Las rectas g_{AB} y g_{AC} son los circuncírculos de los triángulos AB∞ y AC∞.

El problema se transforma en la afirmación de que g_{AB}, g_{AC} y g_{BC} tienen el mismo radio, ya que en este caso ∞ es el centro de un círculo al que g_{AB}, g_{AC} y g_{BC} son tangentes interiores (o A∞, B∞ y C∞ son ejes de simetría de cada dos de los círculos g_{AB}, g_{AC} y g_{BC}).

La demonstración se basa en la igualdad de los ángulos amarillos y rojos.

Por ejemplo ∠BC∞=∠BA∞ significa que los circuncírculos de BC∞ y BA∞ tienen el mismo radio $R = \dfrac{B\infty}{2\sin \sphericalangle BC\infty}$.

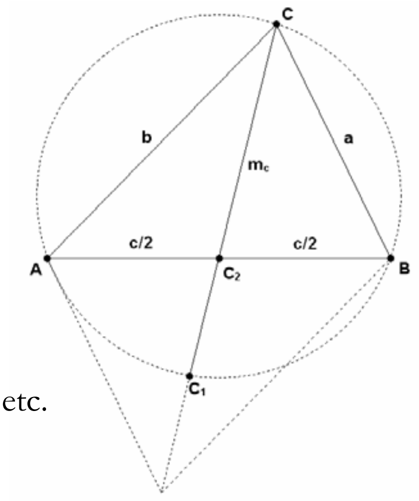


Problema 16 *Sean a, b, c los lados de un triángulo; m_a, m_b, m_c las longitudes de sus medianas, y D el diámetro del círculo circunscrito. Demostrar que*

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\le 6D.$$

(Olimpiada de Rusia 1994, Dimitri Tereshin)

Solución mía (muy similar a la solución propuesta)



Como hay la formula: $\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}=m_c^2$

(ecuación de paralelograma $2a^2+2b^2=(2m_c)^2+c^2$)

se puede escribir $\dfrac{a^2+b^2}{2}=m_c^2+\dfrac{c^2}{4}$ o $\dfrac{a^2+b^2}{2m_c}=m_c+\dfrac{c^2}{4m_c}$

Como $\dfrac{c^2}{4}=m_c\cdot\overline{C_1C_2}$, entonces $\dfrac{a^2+b^2}{2m_c}=m_c+\overline{C_1C_2}=\overline{CC_1}<D$ etc.